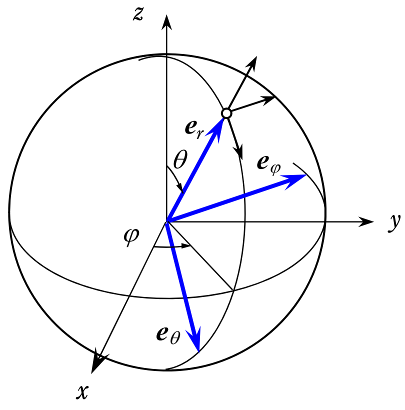
第１章　慣性の法則

1.　極座標について $\boldsymbol{r}$ 方向, θ方向, φ方向の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi$ の x, y, z 成分を求める．半径１の単位球面で考えると図より

$\boldsymbol{e}_r(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)$

$\boldsymbol{e}_\theta(\cos\theta\cos\varphi,\ \cos\theta\sin\varphi,\ -\sin\theta)$

$\boldsymbol{e}_\varphi(-\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ 0)$



これを表にすると各成分の関係はつぎのようになる．

	x	y	z
r	$\sin\theta\cos\varphi$	$\sin\theta\sin\varphi$	$\cos\theta$
θ	$\cos\theta\cos\varphi$	$\cos\theta\sin\varphi$	$-\sin\theta$
φ	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi$	0

［別解］位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ はつぎのように表すことができる．

$$\boldsymbol{r} = r\sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + r\sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j} + r\cos\theta\,\boldsymbol{k}$$

位置ベクトルも $r,\ \theta,\ \varphi$ の関数と考えられるから，偏微分を行うと

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} = \sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j} + \cos\theta\,\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = r\cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + r\cos\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j} - r\sin\theta\,\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} = -r\sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{i} + r\sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{j}$$

これらは位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ に対して $r,\ \theta,\ \varphi$ が増加する向きのベクトルとなる．したがって，単位ベクトルはこれらのベクトルをその大きさで割ったものとなる．

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}\right|^2 = \sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta = 1$$

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\right|^2 = r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta = r^2$$

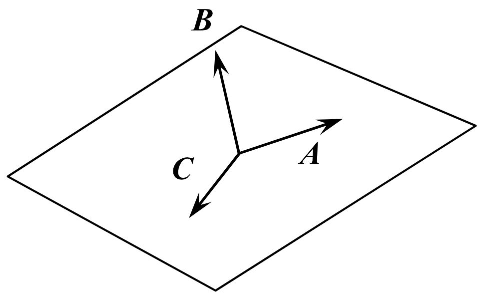
$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}\right|^2 = r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi = r^2\sin^2\theta$$

$$\boldsymbol{e}_r = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} \bigg/ \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} \right| = \sin\theta\cos\varphi\, \boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\varphi\, \boldsymbol{j} + \cos\theta\, \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{e}_\theta = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \bigg/ \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \right| = \cos\theta\cos\varphi\, \boldsymbol{i} + \cos\theta\sin\varphi\, \boldsymbol{j} - \sin\theta\, \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{e}_\theta = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} \bigg/ \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} \right| = -\sin\varphi\, \boldsymbol{i} + \cos\varphi\, \boldsymbol{j}$$

2. ベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ が同じ平面内にあるとき，これらは線形従属の関係にあるから $\lambda\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{B} + \nu\boldsymbol{C} = 0$ となる実数 λ, μ, ν が存在する．



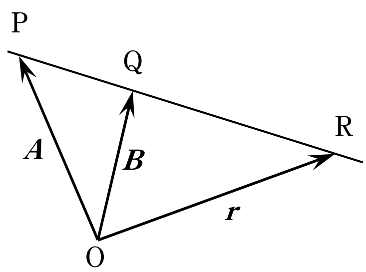
$$(\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{C})\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = 0$$

$\lambda = \mu = \nu = 0$ 以外の解が存在することから

$$\left| \boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{C} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ A_z & B_z & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = 0$$

3. 直線上の任意の点を R とすると，PR と PQ は平行だから スカラー λ を用いて



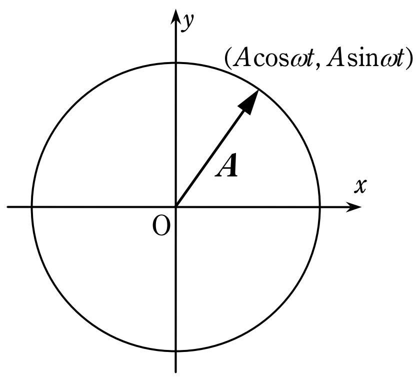
$$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \lambda \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$$

これを位置ベクトルで表すと

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{A} = \lambda(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A})$$

$$\boldsymbol{r} = (1-\lambda)\boldsymbol{A} + \lambda\boldsymbol{B}$$

4. $A_x = A\cos\omega t$，$A_y = A\sin\omega t$ より



$$\frac{dA_x}{dt} = -A\omega\sin\omega t, \quad \frac{dA_y}{dt} = A\omega\cos\omega t$$

$\boldsymbol{A}$ と $d\boldsymbol{A}/dt$ の内積を計算するとその成分は

$$A_x \frac{dA_x}{dt} + A_y \frac{dA_y}{dt} = A\cos\omega t\,(-A\omega)\sin\omega t$$
$$+ A\sin\omega t\, A\omega\cos\omega t = 0$$

したがって，$\boldsymbol{A}$ と $d\boldsymbol{A}/dt$ は直交する．

これは質点が円運動するとき，位置ベクトルと速度ベクトルが直交することを意味している．

［別解］ベクトルを $\boldsymbol{A}$ の大きさが常に一定値 A であることを用いる．

$$|\boldsymbol{A}|^2 = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} = A^2$$

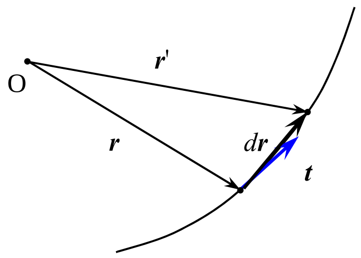
この両辺を時間で微分すると

$$\boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\cdot\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = 0$$

$\boldsymbol{A}$ と $d\boldsymbol{A}/dt$ は直交する．

第５章　運動方程式の変換

1. 接線単位ベクトル $\boldsymbol{t}$ は $d\boldsymbol{r}$ の方向を向く単位ベクトルであるから



$$\boldsymbol{t}=\frac{d\boldsymbol{r}}{|d\boldsymbol{r}|}$$

また，$|d\boldsymbol{r}|=ds$ を用いると

$$\boldsymbol{t}=\frac{d\boldsymbol{r}}{|d\boldsymbol{r}|}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{dz}{ds}\right)$$

曲線上の点の位置ベクトルは媒介変数 t で表示することができる．

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$$

曲線上に一点を固定して，その点からのこの長さ s を変数として $\boldsymbol{r}$ を表示することもできる．

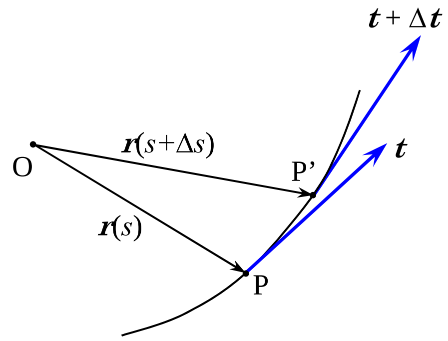
$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)=x(s)\boldsymbol{i}+y(s)\boldsymbol{j}+z(s)\boldsymbol{k}$$

$d\boldsymbol{r}$ は接線方向を向くから，$\boldsymbol{t}=\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ は曲線に接するベクトルであり，その大きさは

$$|\boldsymbol{t}|=\lim_{s\to 0}\left|\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta s}\right|=\lim_{s\to 0}\frac{\overline{\mathrm{PP'}}}{\overset{\frown}{\mathrm{PP'}}}=1$$

$\boldsymbol{t}$ を成分表示すると

$$\boldsymbol{t}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{dz}{ds}\right)$$



$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ は曲線に接するベクトルである．ここで

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{dt}{ds}=\frac{\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}}{\dfrac{ds}{dt}}$$

$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}=|d\boldsymbol{r}|$　であるから $\left|\dfrac{ds}{dt}\right|=\left|\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|$．したがって，

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\Bigg/\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|.$$

2. $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t}=1$ を微分すれば $\boldsymbol{t}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{t}}{ds}=0$．したがって $\dfrac{d\boldsymbol{t}}{ds}$ は $\boldsymbol{t}$ に垂直である．また,

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d\lambda}{ds}=\left|\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\right|$$

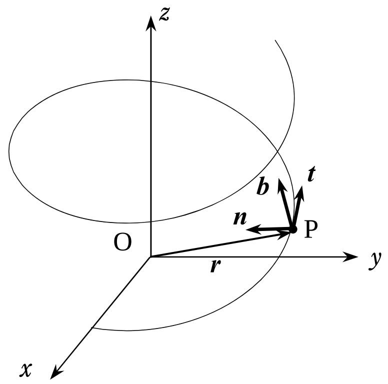
であるから，ベクトル $d\boldsymbol{t}/ds$ の大きさは $1/\rho$ である．したがって

$$\boldsymbol{n}=\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\Bigg/\left|\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\right|=\rho\,\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}$$

前問の結果から $\boldsymbol{t}=\left(\dfrac{dx}{ds},\dfrac{dy}{ds},\dfrac{dz}{ds}\right)$ を代入すると

$$\boldsymbol{n}=\rho\left(\frac{d^2x}{ds^2},\frac{d^2y}{ds^2},\frac{d^2z}{ds^2}\right)\qquad \text{または}\quad \boldsymbol{n}=\rho\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=\rho\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}$$

3. らせんの式 $x=a\cos\varphi,\quad y=a\sin\varphi,\quad z=k\varphi$ について接線，主法線，陪法線を具体的に求める．接線単位ベクトル $\boldsymbol{t}=\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ を用いる．



$$dx=-a\sin\varphi\,d\varphi,\quad dy=a\cos\varphi\,d\varphi,\quad dz=k\,d\varphi$$

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}=\sqrt{a^2+k^2}\;d\varphi=A\,d\varphi$$

ただし，$A=\sqrt{a^2+k^2}$ とおいた．

$$\frac{dx}{ds}=-\frac{a}{A}\sin\varphi=-\frac{y}{A},\qquad \frac{dy}{ds}=\frac{a}{A}\cos\varphi=\frac{x}{A},\qquad \frac{dz}{ds}=\frac{k}{A}$$

$$\boldsymbol{t}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{dz}{ds}\right)=\left(-\frac{a\sin\varphi,}{A},\frac{a\cos\varphi}{A},\frac{k}{A}\right)=\left(-\frac{y}{A},\frac{x}{A},\frac{k}{A}\right)$$

主法線単位ベクトルは $\boldsymbol{n}=\rho\left(\dfrac{d^2x}{ds^2},\dfrac{d^2y}{ds^2},\dfrac{d^2z}{ds^2}\right)$, $\dfrac{1}{\rho}=\left|\dfrac{d\boldsymbol{t}}{ds}\right|$ を用いる

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=\left(\frac{d^2x}{ds^2},\frac{d^2y}{ds^2},\frac{d^2z}{ds^2}\right)\text{から}\quad \frac{d^2x}{ds^2}=-\frac{1}{A}\frac{dy}{ds}=-\frac{x}{A^2},\quad \frac{d^2y}{ds^2}=\frac{1}{A}\frac{dx}{ds}=-\frac{y}{A^2},\quad \frac{d^2z}{ds^2}=0$$

$$\frac{1}{\rho}=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{x}{A^2}\right)^2+\left(\frac{y}{A^2}\right)^2}=\frac{a}{A^2},\quad \rho=\frac{A^2}{a}=\frac{a^2+k^2}{a}$$

$$\boldsymbol{n}=\rho\left(\frac{d^2x}{ds^2},\frac{d^2y}{ds^2},\frac{d^2z}{ds^2}\right)=\frac{A^2}{a}\left(-\frac{x}{A^2},-\frac{y}{A^2},0\right)=\left(-\frac{x}{a},-\frac{y}{a},0\right)$$

陪法線ベクトル $\boldsymbol{b}$ は，接線ベクトルと主法線ベクトルから $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}$ より計算する．

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -y/A & x/A & k/A \\ -x/a & -y/a & 0 \end{vmatrix} \text{ より，} \quad \boldsymbol{b}=\left(\frac{k}{\sqrt{a^2+k^2}}\sin\varphi,\ -\frac{k}{\sqrt{a^2+k^2}}\cos\varphi,\ \frac{a}{\sqrt{a^2+k^2}}\right)$$

4. 加速度の x, y, z 成分を計算し，それを n, θ, φ 方向に座標変換する．

$$x=(c+a\sin\theta)\cos\varphi$$

$$\begin{aligned}\dot{x}&=a\cos\theta\dot{\theta}\cos\varphi-(c+a\sin\theta)\sin\varphi\dot{\varphi}\\ &=a\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi-c\dot{\varphi}\sin\varphi-a\dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{x}&=a\ddot{\theta}\cos\theta\cos\varphi-a\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\varphi-a\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\sin\varphi-c\ddot{\varphi}\sin\varphi-c\dot{\varphi}^2\cos\varphi\\ &\quad-a\ddot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi-a\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\sin\varphi-a\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\varphi\\ &=a\ddot{\theta}\cos\theta\cos\varphi-a(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2)\sin\theta\cos\varphi-2a\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\sin\varphi-a\ddot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi\\ &\quad-c\ddot{\varphi}\sin\varphi-c\dot{\varphi}^2\cos\varphi\end{aligned}$$

$$y=(c+a\sin\theta)\sin\varphi$$

$$\begin{aligned}\dot{y}&=a\cos\theta\dot{\theta}\sin\varphi+(c+a\sin\theta)\cos\varphi\dot{\varphi}\\ &=a\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi+c\dot{\varphi}\cos\varphi+a\dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{y}&=a\ddot{\theta}\cos\theta\sin\varphi-a\dot{\theta}^2\sin\theta\sin\varphi+a\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\cos\varphi+c\ddot{\varphi}\cos\varphi-c\dot{\varphi}^2\sin\varphi\\ &\quad+a\ddot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi+a\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\cos\varphi-a\dot{\varphi}^2\sin\theta\sin\varphi\\ &=a\ddot{\theta}\cos\theta\sin\varphi-a(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2)\sin\theta\sin\varphi+2a\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\cos\varphi+a\ddot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi\\ &\quad+c\ddot{\varphi}\cos\varphi-c\dot{\varphi}^2\sin\varphi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z&=a\cos\theta\\ \dot{z}&=-a\dot{\theta}\sin\theta\\ \ddot{z}&=-a\ddot{\theta}\sin\theta-a\dot{\theta}^2\cos\theta\end{aligned}$$

第 1 章　問題 1 の結果から各成分の関係はつぎのようになる．

	x	y	z
n	$\sin\theta\cos\varphi$	$\sin\theta\sin\varphi$	$\cos\theta$
θ	$\cos\theta\cos\varphi$	$\cos\theta\sin\varphi$	$-\sin\theta$
φ	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi$	0

$$
\begin{aligned}
A_n &= \ddot{x}\sin\theta\cos\varphi + \ddot{y}\sin\theta\sin\varphi + \ddot{z}\cos\theta \\
&= \{a\ddot{\theta}\cos\theta\cos\varphi - a(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2)\sin\theta\cos\varphi - 2a\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\sin\varphi - a\ddot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi \\
&\quad - c\ddot{\varphi}\sin\varphi - c\dot{\varphi}^2\cos\varphi\}\sin\theta\cos\varphi \\
&\quad + \{a\ddot{\theta}\cos\theta\sin\varphi - a(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2)\sin\theta\sin\varphi + 2a\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\cos\varphi + a\ddot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi \\
&\quad + c\ddot{\varphi}\cos\varphi - c\dot{\varphi}^2\sin\varphi\}\sin\theta\sin\varphi \\
&\quad + (-a\ddot{\theta}\sin\theta - a\dot{\theta}^2\cos\theta)\cos\theta \\
&= a\ddot{\theta}\cos\theta\sin\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) - a\ddot{\theta}\cos\theta\sin\theta \\
&\quad - a\ddot{\varphi}\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi - c\ddot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi + a\ddot{\varphi}\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi + c\ddot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi \\
&\quad - a\dot{\theta}^2\sin^2\theta\cos^2\varphi - a\dot{\theta}^2\sin^2\theta\sin^2\varphi - a\dot{\theta}^2\cos^2\theta \\
&\quad - a\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\cos^2\varphi - c\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos^2\varphi - a\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\sin^2\varphi - c\dot{\varphi}^2\sin\theta\sin^2\varphi \\
&\quad - 2a\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi + 2a\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi \\
&= -a\dot{\theta}^2 - (c + a\sin\theta)\dot{\varphi}^2\sin\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_\theta &= \ddot{x}\cos\theta\cos\varphi + \ddot{y}\cos\theta\sin\varphi - \ddot{z}\sin\theta \\
&= \{a\ddot{\theta}\cos\theta\cos\varphi - a(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2)\sin\theta\cos\varphi - 2a\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\sin\varphi - a\ddot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi \\
&\quad - c\ddot{\varphi}\sin\varphi - c\dot{\varphi}^2\cos\varphi\}\cos\theta\cos\varphi \\
&\quad + \{a\ddot{\theta}\cos\theta\sin\varphi - a(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2)\sin\theta\sin\varphi + 2a\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\cos\varphi + a\ddot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi \\
&\quad + c\ddot{\varphi}\cos\varphi - c\dot{\varphi}^2\sin\varphi\}\cos\theta\sin\varphi \\
&\quad - (-a\ddot{\theta}\sin\theta - a\dot{\theta}^2\cos\theta)\sin\theta \\
&= a\ddot{\theta}\cos^2\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) + a\ddot{\theta}\sin^2\theta \\
&\quad - a\ddot{\varphi}\cos\theta\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi - c\ddot{\varphi}\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi + a\ddot{\varphi}\cos\theta\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi + c\ddot{\varphi}\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi \\
&\quad - a\dot{\theta}^2\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi - a\dot{\theta}^2\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi + a\dot{\theta}^2\cos\theta\sin\theta \\
&\quad - a\dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi - c\dot{\varphi}^2\cos\theta\cos^2\varphi - a\dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi - c\dot{\varphi}^2\cos\theta\sin^2\varphi \\
&\quad - 2a\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos^2\theta\cos\varphi\sin\varphi + 2a\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos^2\theta\cos\varphi\sin\varphi \\
&= a\ddot{\theta} - (c + a\sin\theta)\dot{\varphi}^2\cos\theta
\end{aligned}
$$

$$A_\varphi = -\ddot{x}\sin\varphi + \ddot{y}\cos\varphi$$

$$= -\{a\ddot{\theta}\cos\theta\cos\varphi - a(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2)\sin\theta\cos\varphi - 2a\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\sin\varphi - a\ddot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi$$

$$-c\ddot{\varphi}\sin\varphi - c\dot{\varphi}^2\cos\varphi\}\sin\varphi$$

$$+\{a\ddot{\theta}\cos\theta\sin\varphi - a(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2)\sin\theta\sin\varphi + 2a\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\cos\varphi + a\ddot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi$$

$$+c\ddot{\varphi}\cos\varphi - c\dot{\varphi}^2\sin\varphi\}\cos\varphi$$

$$= -a\ddot{\theta}\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi + a\ddot{\theta}\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi$$

$$+a\ddot{\varphi}\sin\theta\sin^2\varphi + c\ddot{\varphi}\sin^2\varphi + a\ddot{\varphi}\sin\theta\cos^2\varphi + c\ddot{\varphi}\cos^2\varphi$$

$$+a\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi - a\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi$$

$$+a\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi + c\dot{\varphi}^2\cos\varphi\sin\varphi - a\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi - c\dot{\varphi}^2\cos\varphi\sin\varphi$$

$$+2a\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\sin^2\varphi + 2a\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\cos^2\varphi$$

$$= c\ddot{\varphi} + a\ddot{\varphi}\sin\theta + 2a\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta$$

5. 与えられた条件より　$r = a\sin n\varphi,\quad r^2\dot{\varphi} = h\ (=\mathrm{const.})$　ここから

$$\dot{\varphi} = \frac{h}{r^2}$$

式(5.2-5)より

$$A_\varphi = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right) = 0$$

$$A_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$$

$$= \ddot{r} - r(h/r^2)^2 = \ddot{r} - \frac{h^2}{r^3}$$

A_rを r のみで表現していく．上式より$\ddot{r}$を求める必要がある．

$$\dot{r} = an\dot{\varphi}\cos n\varphi$$

$$\ddot{r} = an\ddot{\varphi}\cos n\varphi - an^2\dot{\varphi}^2\sin n\varphi \qquad (1)$$

ここで $\dot{\varphi} = \dfrac{h}{r^2}$ から，

$$\ddot{\varphi} = -2\frac{h}{r^3}\dot{r} = -2\frac{h}{r^3}an\dot{\varphi}\cos n\varphi = -2\frac{h}{r^3}an\left(\frac{h}{r^2}\right)\cos n\varphi = -2\frac{h^2}{r^5}an\cos n\varphi \qquad (2)$$

(2)を(1)に代入して

$$\ddot{r} = -2\frac{h^2}{r^5}a^2n^2\cos^2 n\varphi - an^2\frac{h^2}{r^4}\sin n\varphi$$

$$= -2\frac{h^2}{r^5}a^2n^2\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right) - an^2\frac{h^2}{r^4}\frac{r}{a} = -2\frac{h^2a^2n^2}{r^5} + 2\frac{h^2n^2}{r^3} - \frac{n^2h^2}{r^3} = -2\frac{h^2a^2n^2}{r^5} + \frac{h^2n^2}{r^3}$$

$$A_r = \ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = -2\frac{h^2a^2n^2}{r^5} + \frac{h^2(n^2-1)}{r^3}$$

第7章　角運動量　面積の原理

1. (a) $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ は $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ の張る平面の法線ベクトルであり，$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ はこの法線ベクトルに直交していることから，$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ は $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ の線形結合で表すことができる．

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\lambda\,\boldsymbol{B}-\mu\,\boldsymbol{C} \qquad (1)$$

$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ は $\boldsymbol{A}$ に直交しているから

$$\lambda\,(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})-\mu\,(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})=0 \qquad (2)$$

(2)より $\lambda=k(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})$，$\mu=k\,(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$ と書くことができる．これを(1)に代入して

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=k\{(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\,\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\,\boldsymbol{C}\} \qquad (3)$$

(3)は任意のベクトルに対して成り立つから $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{j}$ を代入すると

左辺　$\boldsymbol{i}\times(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})=\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}$

右辺　$k\{(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j})\,\boldsymbol{i}-(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i})\,\boldsymbol{j}\}=-k\boldsymbol{j}$

したがって $k=1$．$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\,\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\,\boldsymbol{C}$ が成り立つ．

［別解］　$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ とおき，その成分を D_x, D_y, D_z とすれば　$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ の x 成分は

$$\begin{aligned}A_yD_z-A_zD_y&=A_y(B_xC_y-B_yC_x)-A_z(B_zC_x-B_xC_z)\\&=B_x(A_yC_y+A_zC_z)-C_x(A_yB_y+A_zB_z)\\&=B_x(A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z)-C_x(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)\\&=B_x(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-C_x(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\end{aligned}$$

同様にして，$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ の y 成分，z 成分はつぎのようになる．

$$B_y(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-C_y(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$$
$$B_z(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-C_z(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$$

したがって　$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$　（ベクトル3重積）

(b) $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{E}=\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ E_x & E_y & E_z\end{vmatrix}$ と表されることから，$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{A}$ が成り立つ（問題2参照）．$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}$ とおくと1(a)の結果より

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})&=\{\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})\}\cdot\boldsymbol{A}\\&=\{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D})-\boldsymbol{D}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\}\cdot\boldsymbol{A}\\&=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D})-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\end{aligned}$$

(c) (b)の結果より

$$(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{D})=(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A})(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{D})-(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D})$$
$$(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{D})=(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{D})$$
$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D})-(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})$$

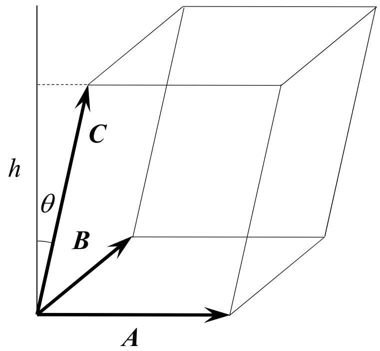
3 式を足し合わせると

$$(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{D})+(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{D})+(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})=0$$

2．6 面体の体積 V は，底面の面積を S，高さを h とすると

$S=|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|$，$h=|\boldsymbol{C}|\cos\theta$ （θ は $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{C}$ のなす角）

であるから

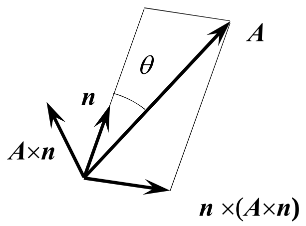


$$V=Sh=|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}||\boldsymbol{C}|\cos\theta=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$$

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

これをスカラー3 重積とよぶ.

3. 問題 1(a)で $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{n}, \boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}=\boldsymbol{n}$ を代入すると



$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{n})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})-\boldsymbol{n}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n})=\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$$

したがって

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{n})+(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$$

幾何学的には $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$ が $\boldsymbol{n}$ 方向のベクトル， $\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{n})$ がそれと直交する方向のベクトル.

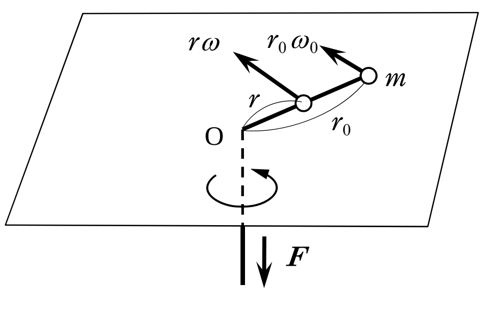
$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n})=|\boldsymbol{A}|\cos\theta$，$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{n}|=|\boldsymbol{A}|\sin\theta$

4. $d\boldsymbol{l}/dt=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ であるが，中心力であり $\boldsymbol{F}$ と $\boldsymbol{r}$ は同じ向きであるため，$d\boldsymbol{l}/dt=0$．質点の角運動量は保存され，質点は角運動量に対して孤立系である．したがって，糸を引く前後の角運動量は一定となるから

$$l=r(mv)=r(mr\omega)=mr^2\omega=mr_0^2\omega_0$$

$$\omega=\frac{r_0^2}{r^2}\omega_0$$

質点の運動エネルギーは



$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}m(r\omega)^2-\frac{1}{2}m(r_0\omega_0)^2 \\
&=\frac{1}{2}m\left(r\frac{r_0^2}{r^2}\omega_0\right)^2-\frac{1}{2}m(r_0\omega_0)^2 \\
&=\frac{m}{2}\left(\frac{r_0^4}{r^2}-r_0^2\right)\omega_0^2>0
\end{aligned}
$$

質点の運動エネルギーは増加する．

力 $\boldsymbol{F}$が質点に対してした仕事は

$$
\begin{aligned}
W&=\int_{r_0}^{r}(-mr\omega^2)\,dr=-\int_{r_0}^{r}mr\left(\frac{r_0^2}{r^2}\omega_0\right)^2dr=-mr_0^4\omega_0^2\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r^3} \\
&=mr_0^4\omega_0^2\left(\frac{1}{2r^2}-\frac{1}{2r_0^2}\right) \\
&=\frac{m}{2}\left(\frac{r_0^4}{r^2}-r_0^2\right)\omega_0^2
\end{aligned}
$$

ひもを下向きにした仕事によって，系にはエネルギーが流入した．系が角運動量について孤立していても，エネルギーについては非孤立である．

この系について，エネルギーの増分から角運動量保存則を導く．ひもがなす仕事が運動エネルギーの増加になることから

$$
Fdr=d\left(\frac{mv^2}{2}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&-m\frac{v^2}{r}dr=mv\,dv \\
&-\frac{dr}{r}=\frac{dv}{v} \\
&\log v=-\log r+c \\
&\log vr=c \\
&vr=e^c=const.
\end{aligned}
$$

これは，原点まわりの角運動量mvrが一定であることを示している．

5.力が r 方向にのみ働き φ 方向には働かないことに注意すると，極座標系で表示した運動方程

式(5.2.6)は,

$$f(r) = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)$$
$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0$$

2 式より $r^2\dot{\varphi} = h$ (角運動量が保存される，面積速度一定)．ここから $\dot{\varphi} = h/r^2$

$r = a(1 + c\cos\varphi)$ より

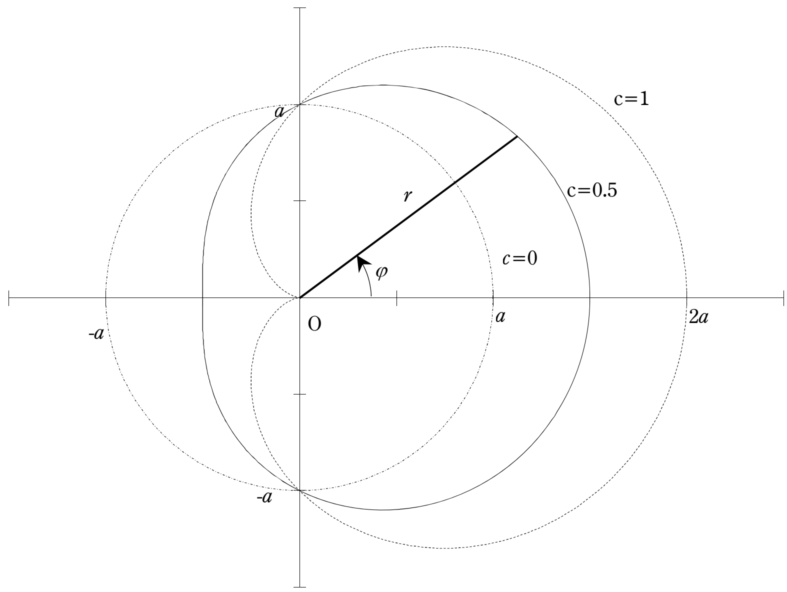
$$\dot{r} = -ac(\sin\varphi)\dot{\varphi} = -\frac{ha}{r^2}c\sin\varphi$$

$$\begin{aligned}
\ddot{r} &= \frac{2ha}{r^3}c\dot{r}\sin\varphi - \frac{ha}{r^2}c(\cos\varphi)\dot{\varphi} \\
&= \frac{2ha}{r^3}c\left(-\frac{ha}{r^2}c\sin\varphi\right)\sin\varphi - \frac{ha}{r^2}c(\cos\varphi)\frac{h}{r^2} \\
&= -\frac{2h^2a^2}{r^5}c^2\sin^2\varphi - \frac{h^2a}{r^4}c\cos\varphi \\
&= -\frac{2h^2a^2}{r^5}c^2 + \frac{2h^2a^2}{r^5}c^2\cos^2\varphi - \frac{h^2a}{r^4}c\cos\varphi
\end{aligned}$$

中心力を求めるのであるからこれを r で表していく．$r = a(1 + c\cos\varphi)$ より $c\cos\varphi = r/a - 1$ を代入すると

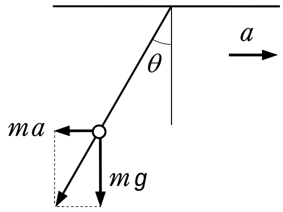
$$\begin{aligned}
\ddot{r} &= -\frac{2h^2a^2}{r^5}c^2 + \frac{2h^2a^2}{r^5}\left(\frac{r}{a} - 1\right)^2 - \frac{h^2a}{r^4}\left(\frac{r}{a} - 1\right) \\
&= -\frac{2h^2a^2}{r^5}c^2 + \frac{2h^2}{r^3} - \frac{4h^2a}{r^4} + \frac{2h^2a^2}{r^5} - \frac{h^2}{r^3} + \frac{h^2a}{r^4} \\
&= \frac{2h^2a^2}{r^5}(1 - c^2) - \frac{3h^2a}{r^4} + \frac{h^2}{r^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(r) = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= m\left\{\frac{2h^2a^2}{r^5}(1 - c^2) - \frac{3h^2a}{r^4} + \frac{h^2}{r^3} - r\left(\frac{h}{r}\right)^2\right\} \\
&= mh^2a^2\left\{-\frac{3}{r^4} + \frac{2(1 - c^2)}{r^5}\right\}
\end{aligned}$$


c=1
c=0.5
c=0
a
r
φ
O
-a
a
2a
-a

第 9 章　相対運動

1. 列車の加速度と逆の方向に見かけの力 ma が生ずるから図より

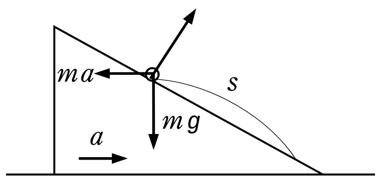


$$\tan\theta = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g} \quad \text{より} \quad \theta = \tan^{-1}\frac{a}{g}$$

2．見かけ上，重力が $\sqrt{g^2+a^2}$ になったように．

$\theta = \tan^{-1}\dfrac{a}{g}$ の方向に沿って，下向きに $\sqrt{g^2+a^2}$ の大きさの加速度で運動をする．

3．斜面に沿った距離を s とする．斜面が右向きに正の加速度を持つとき斜面にそった方向と垂直な方向の運動方程式は



$$m\ddot{s} = mg\sin\theta - ma\cos\theta$$

$$N = mg\cos\theta + ma\sin\theta$$

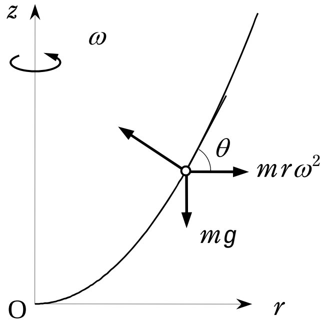
斜面が右向きに負の加速度を持つとき．

$$m\ddot{s} = mg\sin\theta + ma\cos\theta$$

$$N = mg\cos\theta - ma\sin\theta$$

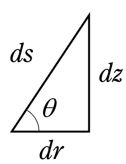
以上より加速度 $g\sin\theta \mp a\cos\theta$，抗力 $mg\cos\theta \pm ma\sin\theta$

4．曲線にそった方向の運動方程式で，見かけの力として遠心力を考えると



$$m\frac{dV}{dt} = mr\omega^2\cos\theta - mg\sin\theta$$

幾何学的関係



$$\cos\theta = \frac{dr}{ds}, \quad \sin\theta = \frac{dz}{ds}$$

$\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{dV}{ds}\dfrac{ds}{dt} = V\dfrac{dV}{ds}$ を代入すると

$$V\frac{dV}{ds} = r\omega^2\frac{dr}{ds} - g\sin\theta\frac{dz}{ds}$$

$z = r^2/(2a)$ より $dz = (r/a)dr$ であるから

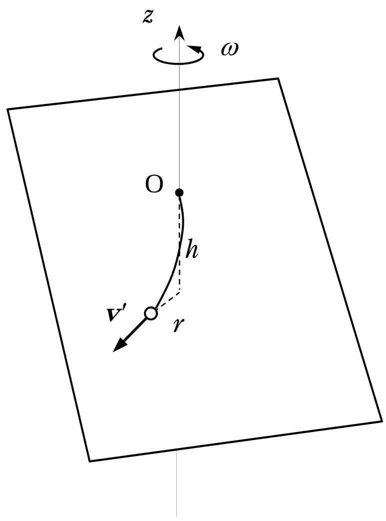
$$V\,dV = \left(\omega^2 - \frac{g}{a}\right) r\,dr$$

$r = r_0$ で $V=0$ として

$$V^2 = \left(\omega^2 - \frac{g}{a}\right)(r^2 - r_0^2)$$

5．移動座標系で記述した運動においてもエネルギー保存則は成り立つ（式(9.3-5) に dx, dy, dz をかけて積分すれば明らか）．このとき，コリオリ力は（相対）速度に垂直であるため，仕事をしない（$\boldsymbol{F}_{corr} = 2\,\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{\omega}$）．質点になされる仕事 W は

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{P_1}^{P_2} (F_r dr + F_z dz)$$



重力のなす仕事　$\displaystyle\int_{P_1}^{P_2} F_z dz = mgh$

遠心力の仕事　$\displaystyle\int_{P_1}^{P_2} F_r dr = \int_0^r mr\omega^2 dr = \frac{mr^2\omega^2}{2}$

エネルギー保存の法則は相対的な速さを V として

$$\frac{mV^2}{2} = mgh + \frac{mr^2\omega^2}{2}$$
$$V^2 = 2gh + r^2\omega^2$$

6．式(9.4－6)より

$$m\ddot{x} = X + 2m\omega \sin\lambda\,\dot{y}$$
$$m\ddot{y} = Y - 2m\omega(\dot{x}\sin\lambda + \dot{z}\cos\lambda)$$

題意より，

$\dot{x} = \dot{y} = 0,\ \dot{z} = V$ (上昇), $\dot{z} = -V$ (下降), $\ddot{x} = 0, \ddot{y} = 0$

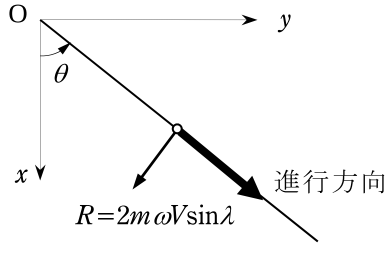
反力　$R_x = -X = 0$

反力　$R_y = -Y = -2m\omega\dot{z}\cos\lambda$

上昇の時西向きに $2m\omega V\cos\lambda$ の力

7．式(9.4－6)より

$$m\ddot{x} = X + 2m\omega\,\dot{y}\sin\lambda$$
$$m\ddot{y} = Y - 2m\omega\,\dot{x}\sin\lambda$$



$\ddot{x}=\ddot{y}=0$, $\dot{x}=V\cos\theta,\ \dot{y}=V\sin\theta$ として 反力 R_x, R_y は

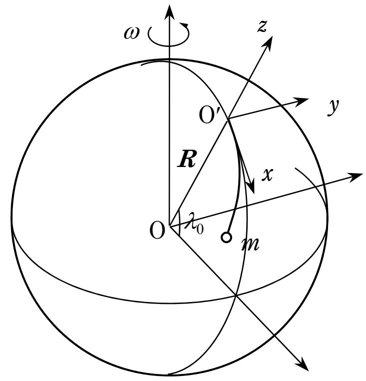
$$R_x=-X=2m\omega V\sin\lambda\sin\theta=2m\omega V\sin\lambda\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$R_y=-Y=-2m\omega V\sin\lambda\cos\theta=2m\omega V\sin\lambda\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$$

レールの進行方向に直交右向きに$2m\omega V\sin\lambda$の力が働く

8. 式（9.4.6）より地球表面の運動方程式はつぎのようになる．

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}&=X+2m\omega\sin\lambda\cdot\dot{y}\\ m\ddot{y}&=Y-2m\omega(\dot{x}\sin\lambda+\dot{z}\cos\lambda)\\ m\ddot{z}&=Z-mg+2m\omega\cos\lambda\cdot\dot{y}\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$



初期条件は $t=0$ で

$$x=0,\ y=0,\ z=0$$

$$\dot{x}=V_0\cos\theta,\ \dot{y}=0,\ \dot{z}=V_0\sin\theta$$

$\dot{y}$ は質点の運動において小さいと考えられるから，これを無視すると式(1)はつぎのように書くことができる．

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}&=0\\ \ddot{y}&=-2\omega\dot{x}\sin\lambda-2\omega\dot{z}\cos\lambda\\ \ddot{z}&=-g\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

(2)の１式と３式を初期条件を考慮して積分すると

$$\dot{x}=V_0\cos\theta$$

$$\dot{z}=V_0\sin\theta-gt$$

これを第２式に代入すると

$$\begin{aligned}\ddot{y}&=-2\omega V_0\cos\theta\sin\lambda-2\omega(V_0\sin\theta-gt)\cos\lambda\\ &=2\omega g\cos\lambda\cdot t-2\omega V_0(\cos\theta\sin\lambda+\sin\theta\cos\lambda)\end{aligned}$$

$$\dot{y}=\omega g\cos\lambda\cdot t^2-2\omega V_0(\cos\theta\sin\lambda+\sin\theta\cos\lambda)t$$

時刻 t での位置はつぎのようになる．

$$\left.\begin{aligned} x&=V_0\cos\theta\cdot t\\ y&=\omega g\cos\lambda\cdot\frac{t^2}{3}-\omega V_0(\cos\theta\sin\lambda+\sin\theta\cos\lambda)t^2\\ z&=V_0\sin\theta\cdot t-\frac{gt^2}{2}\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

落下点では $z=0$ であるから，式(2)の第３式よりこのときの時刻を求めると

$$t=\frac{2V_0\sin\theta}{g}$$

これを(2)の第 1 式に代入して，落下点の座標 x, y を求めると

$$x=\frac{2V_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}$$

$$y=\omega g\cos\lambda\cdot\frac{8V_0^3\sin^3\theta}{3g^3}-\omega V_0(\cos\theta\sin\lambda+\sin\theta\cos\lambda)\frac{V_0^2\sin\theta}{g^2}$$

$$=-\frac{4\omega V_0^3\sin^2\theta}{g^2}\left(\cos\theta\sin\lambda+\frac{1}{3}\sin\theta\cos\lambda\right)$$

落下地点は $\dfrac{4\omega V_0^3\sin^2\theta}{g^2}\left(\cos\theta\sin\lambda+\dfrac{1}{3}\sin\theta\cos\lambda\right)$ だけ西にずれる．これはコリオリ力により質点の進行方向からみて右方向に力を受けることによる．自転による経度方向の速度が，高緯度では低緯度よりも低いため，高緯度から投げ出された物体は低緯度に行くにしたがい，西側にずれていく．

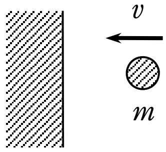
これに　$V_0=500$ m/s, $\theta=45°$, $\omega=2\pi/(24\times60\times60)$ を代入すると

$y=125.9$ m

第 10 章　質点系の運動

1．石が壁によって止められる場合（反発係数 0）

Δt の時間で N 個の石が衝突したとき，壁が受ける力の大きさ F は 石の力積の変化にから



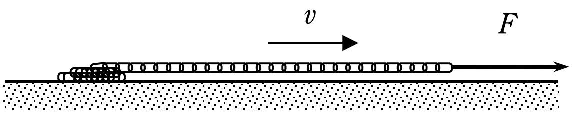
$$F\,\Delta t = Nmv$$

$$F = \frac{N}{\Delta t} mv = nmv$$

単位は $[\mathrm{s^{-1}\cdot kg\cdot m\cdot s^{-1}}]=[\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-2}}]=[\mathrm{N}]$

完全弾性の場合　$F\,\Delta t = Nm(2v)$ より　$F = 2nmv$

2．質量が変化する物体について運動量と力積の関係から



$$(m+dm)v - mv = F\,dt$$

$$F = v\frac{dm}{dt} = v\frac{\lambda\,dx}{dt} = \lambda v^2$$

［別解］鎖の長さあたりの質量が λ であるから，運動に参加している部分の質量は $m=\lambda x$．式(10.1-7)より運動方程式は

$$F = \frac{d}{dt}(\lambda x v)$$

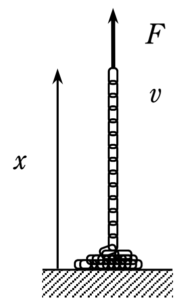
$$= \lambda\dot{x}v + \lambda x\dot{v} = \lambda v^2$$

鎖の輪同士には内力が働くが，それらは互いに作用反作用の法則から打ち消し合い，鎖を質点系としてみたとき全体として式(10.1-7)が成り立つ．

3．時刻 t で運動に参加している質量 m，速度 v の鎖は，dt 時間で速度はそのままで質量が dm 増加する．鎖に加わる外力は $F-mg$ である．運動量の変化は

$$(m+dm)v - mv = (F-mg)dt$$

$$F = v\frac{dm}{dt} + mg = v\frac{\lambda\,dx}{dt} + \lambda xg = \lambda v^2 + \lambda xg$$



［別解］鎖が順次，静止状態から運動を始め，時間よって運動に参加する質量が増加する．運動方程式(10.1.7)は，鎖の長さあたりの質量が λ であるからつぎのようになる．

$$\frac{d}{dt}(\lambda x v) = F - \lambda x g$$

一定速度であるから

$$\frac{d}{dt}(\lambda x v) = \lambda \dot{x} v = \lambda v^2$$

$$F = \lambda x g + \lambda v^2$$

4．運動方程式 (10.1-7) は

$$\frac{d}{dt}(\lambda x v) = F - \lambda x g \quad \text{すなわち，} \quad \frac{d}{dt}(x v) = \frac{F}{\lambda} - x g$$

変位について考え，変数変換を行う． $\frac{d}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{d}{dx} = v\frac{d}{dx}$

$$v\frac{d}{dx}(x v) = \frac{F}{\lambda} - x g, \quad x v\frac{d}{dx}(x v) = \frac{F}{\lambda}x - g x^2$$

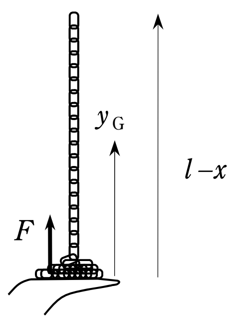
F は一定であることに注意してこれを x について積分すると，

$$\frac{(x v)^2}{2} = \frac{F}{2\lambda}x^2 - \frac{g}{3}x^3 + C$$

$x=0$ で $v=0$ とすると $C=0$.

$$v^2 = \frac{F}{\lambda} - \frac{2g}{3}x$$

5．長さ x だけ手で受け止めたときの鎖全体の重心の高さ y_{G} は



$$l\, y_{\mathrm{G}} = (l-x)\frac{l-x}{2} \text{ から } y_{\mathrm{G}} = \frac{(l-x)^2}{2l}$$

重心の運動方程式

$$(\rho l)\ddot{y}_{\mathrm{G}} = F - \rho l g \qquad (1)$$

ここで，$\dot{y}_{\mathrm{G}} = \frac{x-l}{l}\dot{x}$，$\ddot{y}_{\mathrm{G}} = \frac{\dot{x}}{l}\dot{x} + \frac{x-l}{l}\ddot{x} = \frac{\dot{x}^2 + (x-l)\ddot{x}}{l}$

鎖の運動中の部分は自由落下しているから $\ddot{x} = g$，$\dot{x}^2 = 2gx$

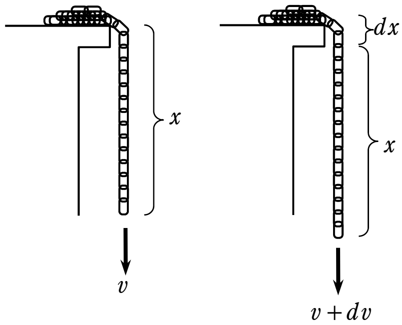
$$\ddot{y}_{\mathrm{G}} = \frac{2gx + (x-l)g}{l} = \frac{3gx}{l} - g$$

(1)に代入すると

$$F=\rho l\left(\frac{3gx}{l}-g\right)+\rho lg=3\rho gx=3W\frac{x}{l}$$

6．運動中の部分の質量は λx, 作用する力は $\lambda x g$ であるから，これを運動方程式(10.1-7) $dP/dt=F$ に代入すると

$$\frac{d}{dt}(\lambda x\dot{x})=\lambda gx,\ \frac{d}{dt}(x\dot{x})=gx$$



[別解] 時刻 t における運動量

$$P(t)=(\lambda x)v$$

時間が Δt だけたった後，鎖は長さ dx だけずり落ち，鎖全体の速さが dv だけ増したとすると運動量は

$$P(t+dt)=\lambda(x+dx)(v+dv)$$

したがって

$$P(t+dt)-P(t)=\lambda x dv+\lambda v dx=\lambda g x\,dt\ .$$

$$x\frac{dv}{dt}+\frac{dx}{dt}v=gx$$

$d(x\dot{x})/dt=gx$ が導ける．

両辺に $x\dot{x}$ をかけると

$$x\dot{x}\frac{d}{dt}(x\dot{x})=x^2\dot{x}g$$

$$\frac{1}{2}(x\dot{x})^2=\frac{x^3g}{3}$$ (x=0 で $\dot{x}=0$ とした)

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2=\frac{gx}{3},\ \dot{x}=\sqrt{\frac{2}{3}gx}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x}}=\sqrt{\frac{2g}{3}}dt$$ （変数分離形）

$$2\sqrt{x}=\sqrt{\frac{2g}{3}}t,\ x=\frac{1}{6}gt^2$$ (t=0 で x=0 とした)

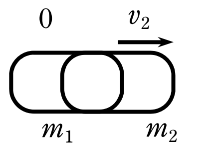
エネルギーの変化

質量 $m=x$ の部分が速度 v となり，その質量中心が $x/2$ だけ下がったから，鎖の全エネルギーは

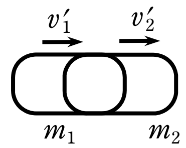
$$\frac{1}{2}(\lambda x)v^2 - \lambda x\frac{xg}{2} = \frac{1}{2}(\lambda x)\frac{2xg}{3} - \lambda x\frac{xg}{2}$$
$$= -\frac{\lambda g x^2}{6}$$

エネルギーが減少することは，つぎのような問題から理解することができる．
t=0 で質点 1 の速度が 0，質点 2 の速度が v_2 とし，その後，質点 1，2 が同じ速度で動く場合，運動量保存則によって，

$$v_1' = v_2' = \frac{m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$



エネルギーは $\frac{1}{2}m_1 v_2^2 - \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 - \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 = \frac{m_1 m_2 v_2^2}{2(m_1+m_2)}$ だけ減少している．質点 1, 2 が同じ速度となっているため，完全非弾性衝突と同じとなり，エネルギーの減少が起こっている．もし反発係数が 0 でなければ，質点 1，2 が反発により異なる速度となる．



この問題で考えると，鎖λx とλdx がそれぞれ初速度 $v, 0$ を持ち，その後，ともに同じ速度となることからエネルギーの増分は

$$dE = -\frac{1}{2}\frac{\lambda x \cdot \lambda dx}{\lambda x + \lambda dx}v^2 \approx -\frac{1}{2}\lambda v^2 dx$$

両辺を dt で割ると

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{2}\lambda v^2 \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}\lambda v^3$$

一方, 鎖全体の運動エネルギーと位置エネルギーの関係から，$E = (\lambda x)v^2/2 - \lambda x(gx)/2$ であるから

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\lambda v^3 + \lambda x v\frac{dv}{dt} - \lambda g x v = \lambda v\left(\frac{1}{2}v^2 + x\frac{dv}{dt} - gx\right)$$

$\frac{d}{dt}(x\dot{x}) = gx$ より $\dot{x}^2 + x\frac{dv}{dt} - gx = 0$ であるから

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{2}\lambda v^3$$

となり，エネルギーの時間微分が一致することがわかる．すなわち，鎖の動き出す部分で完全非弾性衝突と同じことが起きており，エネルギーが減少する．

7. $\dfrac{d(mv)}{dt}=mg$, $m=m_0+at$ から速度と変位を求める．両辺を時間で積分して

$$mv=\int_0^t mg\,dt=\left(m_0t+\frac{at^2}{2}\right)g\,,\quad v=\frac{m_0t+\dfrac{at^2}{2}}{m_0+at}g$$

速度 v を積分するために形を整える．

$$\frac{m_0+\dfrac{at^2}{2}}{m_0+at}=\frac{\dfrac{t}{2}(m_0+at)+\dfrac{t}{2}m_0}{m_0+at}=\frac{t}{2}+\frac{tm_0}{2(m_0+at)}$$

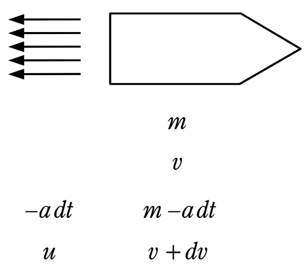
$$=\frac{t}{2}+\frac{\dfrac{m_0}{a}(m_0+at)-\dfrac{m_0^2}{a}}{2(m_0+at)}=\frac{t}{2}+\frac{m_0}{2a}-\frac{m_0^2}{2a(m_0+at)}$$

$$=\frac{t}{2}+\frac{m_0}{2a}-\frac{m_0}{2a}\frac{1}{1+at/m_0}$$

$$x=\int_0^t v\,dt=\int_0^t\left\{\frac{t}{2}+\frac{m_0}{2a}-\frac{m_0^2}{2a(m_0+at)}\right\}g\,dt$$

$$=\frac{gt^2}{2}+\frac{m_0g}{2a}t-\frac{m_0^2g}{2a^2}\log\left(1+\frac{a}{m_0}t\right)$$

8. 時刻 t で物体の質量を m，速度を v とすると，時刻 $t+dt$ で物体の質量は $m-a\,dt$ となり，速度は $v+dv$ となる．投げ出された質量は $a\,dt$ であり，この部分の速度を u とする．外力は働かないから運動量保存の法則が成り立つ．



$$(m-adt)(v+dv)+(adt)u-mv=0$$

$u=0$ であるから

$$(m-adt)(v+dv)-mv=0$$

$$m\,dv=av\,dt\,,\quad \frac{dv}{v}=\frac{a}{m}dt$$

ここで $m=m_0-a\,dt$ と表されるから

$$\frac{dv}{v}=\frac{a}{m_0-at}dt$$

$$\log v=-\log(m_0-at)+C\,,\quad v=\frac{C'}{m_0-at}$$

初期条件 $t=0$ で速度 v_0 であるから $C'=m_0v_0$

速度　$v = \dfrac{m_0 v_0}{m_0 - at}$

変位　$x = \displaystyle\int_0^t \frac{m_0 v_0}{m_0 - at} dt = \left[-\frac{m_0 v_0}{a} \log(m_0 - at) \right]_0^t = -\frac{m_0 v_0}{a} \log \frac{m_0 - at}{m_0}$

［別解］運動方程式(10.1.7)を用いると，外力は働かないから

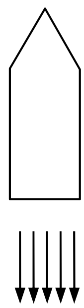
$$\frac{d(mv)}{dt} = 0$$

$mv = m_0 v_0$　（一定）

ここから速度

$$v = \frac{m_0 v_0}{m} = \frac{m_0 v_0}{m_0 - at}$$

9．時刻 t での質量が m，速度が v であり，時刻 $t+dt$ で質量 $m+dm$ の部分が $v+dv$ となり，$-dm$ の部分が $v-U$ で投げられるとする（例題 3 参照）鉛直方向の運動であるから，$-mg$ の力が働く．運動量の変化は



$$(m + dm)(v + dv) + (-dm)(v - U) - mv = -mg\,dt$$

$$m\frac{dv}{dt} + U\frac{dm}{dt} = -mg$$

$$v = U \log \frac{m_0}{m} - gt$$

$m = m_0 - at$　を代入すると

$$v = U \log \frac{m_0}{m_0 - at} - gt$$

積分の公式 $\int \log x\, dx = x(\log x - 1)$ を用いる．$v = -U \log \dfrac{m_0 - at}{m_0} - gt$ と書き換える．

$$y = \int_0^t \left(-U \log \frac{m_0 - at}{m_0} - gt \right) dt$$

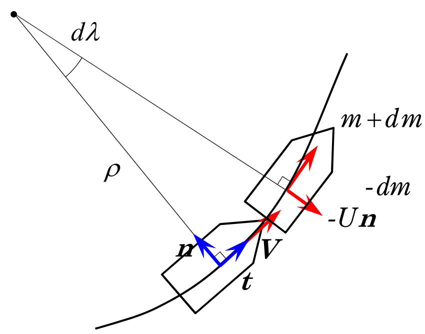
$$= \left[-U \frac{m_0 - at}{m_0} \left(\log \frac{m_0 - at}{m_0} - 1 \right) \left(-\frac{m_0}{a} \right) - \frac{gt^2}{2} \right]_0^t = \left[U \frac{m_0 - at}{a} \left(\log \frac{m_0 - at}{m_0} - 1 \right) - \frac{gt^2}{2} \right]_0^t$$

$$= U \frac{m_0 - at}{a} \left(\log \frac{m_0 - at}{m_0} - 1 \right) - \frac{gt^2}{2} + U \frac{m_0}{a} = U \left(t + \frac{m_0 - at}{a} \log \frac{m_0 - at}{m_0} \right) - \frac{gt^2}{2}$$

$$= U \left(t - \frac{m}{a} \log \frac{m_0}{m} \right) - \frac{gt^2}{2}$$

10. 経路にそった自然座標で考える．運動量保存則

$$(m+dm)(\boldsymbol{V}+d\boldsymbol{V})+(-dm)(\boldsymbol{V}-U\boldsymbol{n})=m\boldsymbol{V}$$



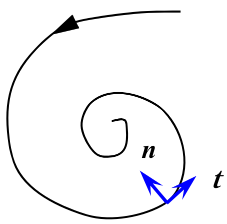
$$m\,d\boldsymbol{V}+U\boldsymbol{n}\,dm=0$$

$$m\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}+U\frac{dm}{dt}\boldsymbol{n}=0$$

$\dfrac{dm}{dt}=-a$ を代入すると

$$m\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}-aU\boldsymbol{n}=0$$

上式に自然座標での運動方程式 $\dfrac{d\boldsymbol{V}}{dt}=\dfrac{dV}{dt}\boldsymbol{t}+\dfrac{V^2}{\rho}\boldsymbol{n}=0$



（式(5.1-9)）を代入すると

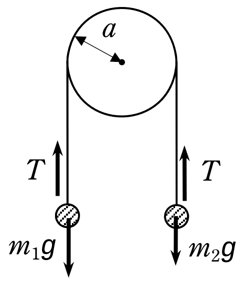
$$m\frac{dV}{dt}\boldsymbol{t}+\left(\frac{V^2}{\rho}-aU\right)\boldsymbol{n}=0$$

$\boldsymbol{t}$ 方向：$\dfrac{dV}{dt}=0$ より $V=$一定.

$\boldsymbol{n}$ 方向：$\dfrac{V^2}{\rho}-aU=0$，$\rho=\dfrac{mV^2}{aU}=\dfrac{(m_0-at)V^2}{aU}$.

$t\to m_0/a$（質量を投げ出すことで物体の質量が 0 に近づくとき）で $\rho\to 0$ となるから，物体の位置は一点に収束する．

11. 滑車の質量は無視できるとする．角運動量は滑車の半径を a として



$$L=m_1va+m_2va$$

糸の張力を T とすると軸まわりの力のモーメントは

$$N=(m_1g-T)a+(T-m_2g)a=(m_1-m_2)ag$$

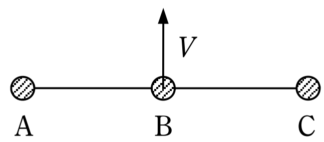
$dL/dt=N$ から

$$\dot{v}=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g$$

$m_1\alpha=m_1g-T$，$m_2\alpha=T-m_2g$ から計算しても同じ解が得られる．

12．衝突直前の B の速度を V' とする．A，C のその方向の速度も V' であるが，それと直角な方向の速度を u とする．運動量保存の法則から

$$mV = mV' + 2mV'$$

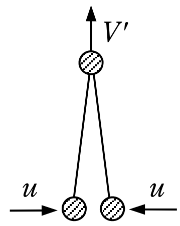


力学的エネルギー保存の法則から

$$\frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}mV'^2 + 2\frac{1}{2}m(u^2 + V'^2)$$

第 1 式より $V' = V/3$

第 2 式に代入して

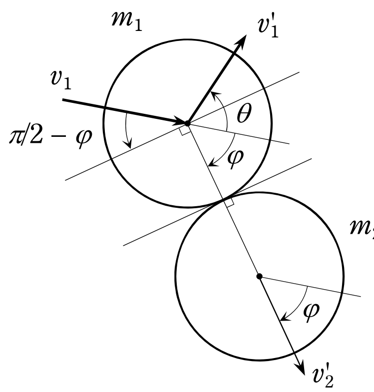


$$u^2 = \frac{1}{2}(V^2 - 3\frac{1}{9}V^2) = \frac{1}{3}V^2 \qquad u = \frac{1}{\sqrt{3}}V$$

A, C の相対速度は $u = (2/\sqrt{3})V$

13. m_1 の衝突前後の速度を v_1，v_1', m_2 の衝突後の速度を v_2' とする. なめらかな面での接触では，面にそった方向には力の作用が伝わらない．すなわち，力は球の中心線の方向のみに働き，それと垂直な速度成分は変化しない.

$$v_1\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = v_1'\cos\left(\theta + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (1)$$



球の互いの中心を結ぶ中心線の方向では運動量保存の法則と反発の法則が成り立つ.

$$m_1 v_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = -m_1 v_1' \sin\left(\theta + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + m_2 v_2' \qquad (2)$$

反発係数は 1 であるから

$$-\frac{v_2' - \left\{-v_1'\sin\left(\theta + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right\}}{-v_1\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} = 1 \qquad (3)$$

(1)より $v_1\sin\varphi = v_1'\sin(\theta + \varphi)$ $\qquad v_1' = v_1\sin\varphi/\sin(\theta + \varphi)$ $\qquad$ (1)'

(3)より $v_2' + v_1'\sin\left(\theta + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = v_1\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$,

$$v_2' = v_1\cos\varphi + v_1'\cos(\theta + \varphi) = v_1\cos\varphi + v_1\sin\varphi/\tan(\theta + \varphi) \qquad (3)'$$

(2)より $\quad m_1 v_1\cos\varphi = m_1 v_1'\cos(\theta + \varphi) + m_2 v_2'$ $\qquad$ (2)'

(1)’, (3)’を(2)’に代入すると

$$m_1 v_1 \cos\varphi = m_1 v_1 \frac{\sin\varphi}{\tan(\theta+\varphi)} + m_2 \left\{ v_1 \cos\varphi + \frac{v_1 \sin\varphi}{\tan(\theta+\varphi)} \right\}$$

$$(m_1 - m_2)\cos\varphi = \frac{(m_1 + m_2)\sin\varphi}{\tan(\theta+\varphi)}$$

$$\tan(\theta+\varphi) = \frac{(m_1 + m_2)\tan\varphi}{m_1 - m_2}, \quad \frac{\tan\theta + \tan\varphi}{1 - \tan\theta\tan\varphi} = \frac{(m_1 + m_2)\tan\varphi}{m_1 - m_2}$$

$$(m_1 - m_2)(\tan\theta + \tan\varphi) = (m_1 + m_2)(1 - \tan\theta\tan\varphi)\tan\varphi$$

$$\tan\theta = \frac{2m_2 \tan\varphi}{m_1 - m_2 + (m_1 + m_2)\tan^2\varphi} = \frac{2m_2 \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}{m_1 - m_2 + (m_1 + m_2)\dfrac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}}$$

$$= \frac{2m_2 \sin\varphi\cos\varphi}{(m_1 - m_2)\cos^2\varphi + (m_1 + m_2)\sin^2\varphi} = \frac{m_2 \sin 2\varphi}{m_1 - m_2 \cos 2\varphi}$$

もし衝突面が滑らかでなければ，衝突面に沿って摩擦力が発生するため，衝突後の速度および角度は異なる．

14．中性子の衝突速度を $\boldsymbol{v}_1$ とし，衝突後の中性子，陽子の速度をそれぞれ $\boldsymbol{v}'_1$，$\boldsymbol{v}'_2$ とする．衝突前の重心の速度は $\boldsymbol{v}_1/2$ であるが，外力は加わっていないので式(10.2-3)より

$$2m\ddot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{G}} = 0$$

となるから，衝突後も陽子と中性子の重心の速度は $\boldsymbol{v}_{\mathrm{G}} = \boldsymbol{v}_1/2$ で等速運動を続ける．運動量保存の法則から

$$\boldsymbol{v}'_1 + \boldsymbol{v}'_2 = \boldsymbol{v}_1 \qquad (1)$$

衝突前後の速度ベクトルは図のようになる．

重心に対する速度ベクトルを計算する．衝突前は

中性子　$\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_{\mathrm{G}} = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_1/2 = \boldsymbol{v}_1/2$

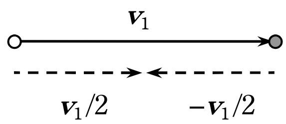
陽　子　$0 - \boldsymbol{v}_{\mathrm{G}} = -\boldsymbol{v}_1/2$

衝突後は，(1)より

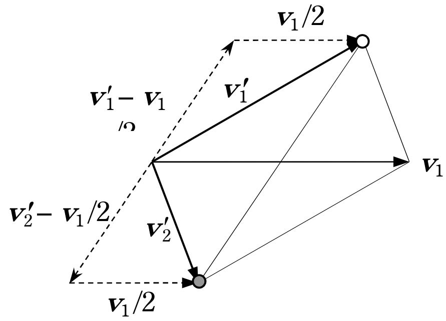
$$\boldsymbol{v}'_1 + \boldsymbol{v}'_2 = \boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{v}_{\mathrm{G}}$$

$$\boldsymbol{v}'_1 - \boldsymbol{v}_{\mathrm{G}} = -(\boldsymbol{v}'_2 - \boldsymbol{v}_{\mathrm{G}})$$

陽子と中性子の重心に対する速度ベクトルは，互いに向きが反対で大きさが等しい．


$\boldsymbol{v}_1$
$\boldsymbol{v}_1/2$
$-\boldsymbol{v}_1/2$

衝突前


$\boldsymbol{v}_1/2$
$\boldsymbol{v}'_1 - \boldsymbol{v}_1$
$\boldsymbol{v}'_1$
$\boldsymbol{v}_1$
$\boldsymbol{v}'_2 - \boldsymbol{v}_1/2$
$\boldsymbol{v}'_2$
$\boldsymbol{v}_1/2$

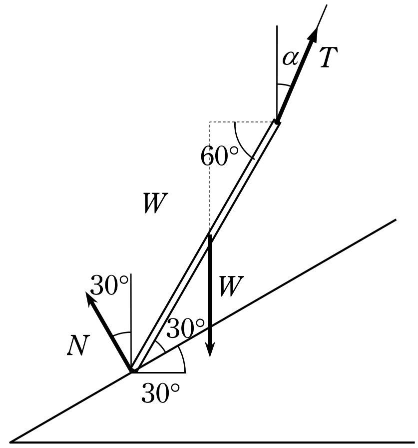
衝突後

第 11 章　剛体のつり合いと運動

1．棒の長さを l, 糸の張力を T, 斜面から棒に働く垂直抗力を N とする．つり合い式は

水平　$T\cos\alpha + \dfrac{\sqrt{3}}{2}N = W$　　(1)

鉛直　$T\sin\alpha = \dfrac{1}{2}N$　　(2)



棒の上端のまわりの力のモーメント

$$W\frac{l}{2}\frac{1}{2} - Nl\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \qquad (3)$$

(3)より

$$N = \frac{W}{2\sqrt{3}} \qquad (4)$$

(3)を(4)に代入して

$$T\sin\alpha = \frac{W}{4\sqrt{3}},\ T\cos\alpha = W - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{W}{2\sqrt{3}} = \frac{3W}{4} \qquad (5)$$

(5)の 2 式の比をとれば

$$\cot\alpha = 3\sqrt{3}$$

(5)の 2 式の 2 乗の和をとると

$$T^2 = \left(\frac{1}{16\cdot 3} + \frac{9}{16}\right)W^2 = \frac{28}{48}W^2 = \frac{7}{12}W^2$$

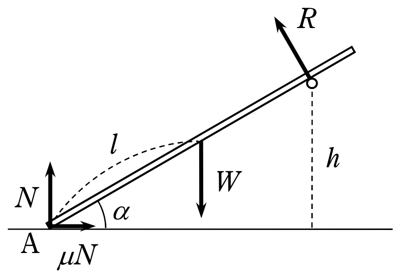
$$T = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}}W$$

2．すべりだす限界であるから最大摩擦力 μN が働く．つり合いは

鉛直：$N = -R\cos\alpha + W$　　(1)

水平：$\mu N = R\sin\alpha$　　(2)

A のまわりの力のモーメント：$Wl\cos\alpha = R\dfrac{h}{\sin\alpha}$　　(3)



(3)より R を求める．

$$R = \frac{Wl\cos\alpha\sin\alpha}{h} \qquad (4)$$

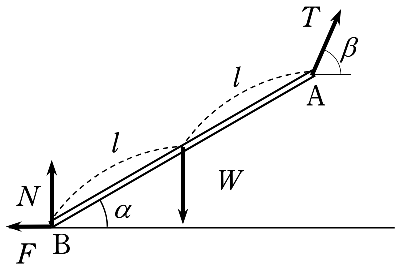
(1),(2)の比を求め，(4)を代入する．

$$\mu = \frac{R\sin\alpha}{-R\cos\alpha + W} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha + W/R}$$
$$= \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha + h/(l\cos\alpha\sin\alpha)} = \frac{l\sin^2\alpha\cos\alpha}{h - l\sin\alpha\cos^2\alpha}$$

3. 棒の重さを W, 長さを $2l$, 糸の張力を T, 糸の傾きを β とする，つり合いの式は

鉛直： $N + T\sin\beta = W$

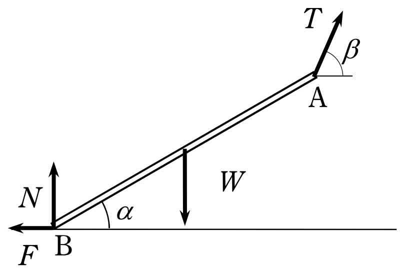
水平： $F = T\cos\beta$



A のまわりの力のモーメント：

$$Wl\cos\alpha = N\cdot 2l\cos\alpha + F\cdot 2l\sin\alpha$$

B 端の N, F の関係を表す． $T = F/\cos\beta$ より

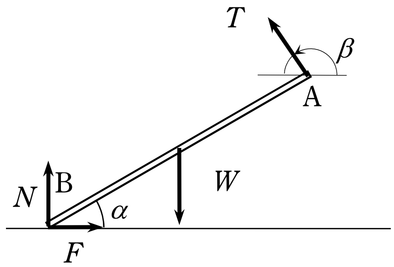


$$(N + F\tan\beta)\cos\alpha = 2N\cos\alpha + 2F\sin\alpha$$
$$\frac{F}{N} = \frac{\cos\alpha}{\tan\beta\cos\alpha - 2\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\beta - 2\tan\alpha}$$

摩擦係数を μ とするとB 端が動かないためには

$-\mu \le F/N \le \mu$ であるから

$$-\mu \le \frac{1}{\tan\beta - 2\tan\alpha} \le \mu$$



$\tan\beta - 2\tan\alpha \ge 0$ のとき,

$$\tan\beta - 2\tan\alpha \ge 1/\mu,\quad \beta \ge \tan^{-1}(2\tan\alpha + 1/\mu)$$

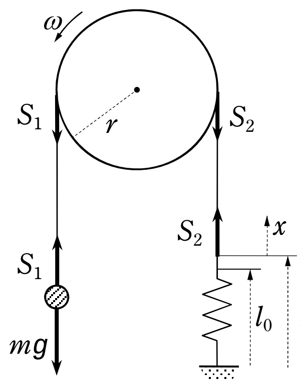
$\tan\beta - 2\tan\alpha \le 0$ のとき,

$$\tan\beta - 2\tan\alpha \le -1/\mu$$

$$\beta \le \tan^{-1}(2\tan\alpha - 1/\mu) = \pi - \tan^{-1}(1/\mu - 2\tan\alpha)$$

4. つり合い状態では ばね の伸びが $l - l_0$ であるから

$$mg = k(l - l_0) \qquad (1)$$



おもりがつり合い状態から x だけ下がったとき，ばねもつり合い位置からさらに x だけ伸びる．糸の張力を S_1, S_2 とすると,

$$S_2 = k(x + l - l_0) \qquad (2)$$

おもりの運動　$m\ddot{x} = mg - S_1$ 　(3)

滑車の回転　　$I\dot{\omega}=r(S_1-S_2)$　　(4)

ただし，$\ddot{x}=r\dot{\omega}$.

式(4)に(3), (1), (2)を代入すると

$$I\frac{\ddot{x}}{r^2}=-m\ddot{x}+mg-k(x+l-l_0)$$

$$\left(\frac{I}{r^2}+m\right)\ddot{x}+k\left(x+l-l_0-\frac{mg}{k}\right)=0$$

$$\left(\frac{I}{r^2}+m\right)\ddot{x}+k\,x=0$$

つり合い位置からとっているため，簡単な式となる．

単振動の式であるから周期 T は

$$T=2\pi\sqrt{\frac{1}{k}\left(\frac{I}{r^2}+m\right)}=2\pi\sqrt{\frac{l-l_0}{mg}\frac{I+mr^2}{r^2}}$$

$$=2\pi\sqrt{\frac{(I+mr^2)(l-l_0)}{mgr^2}}$$

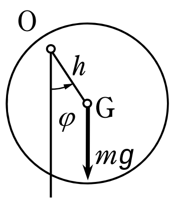
［参考］$m\ddot{x}+kx=0$ の角加速度および周期

$$\ddot{x}+\omega^2x=0 \quad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

5．球の半径を a とすると固定軸 O のまわりの球の慣性モーメントは

$$I=I_{(\mathrm{G})}+mh^2=\left(\frac{2}{5}a^2+h^2\right)m$$



物理振り子の周期 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mgh}}$ を用いると（182 ページ式例題）

$$T=2\pi\sqrt{\left(\frac{2a^2}{5h}+h\right)\frac{1}{g}}$$

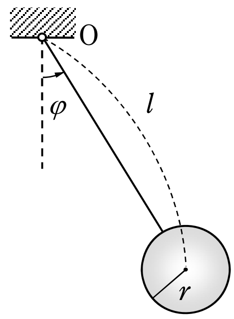
相加平均と相乗平均の関係から

$$\frac{2a^2}{5h}+h\geq 2\sqrt{\frac{2a^2}{5h}\cdot h}=2\sqrt{\frac{2}{5}}\,a$$

であり，等号が成り立つのは $\dfrac{2a^2}{5h}=h$．したがって，$h=\sqrt{\dfrac{2}{5}}\,a$ の時に周期が最小となる．

一般に $I = I_{(\mathrm{G})} + mh^2 = m(\kappa^2 + h^2)$ ．$I/mgh = m(\kappa^2/h + h)g$ が最小となるのは $h{=}\kappa$ のとき，すなわち固定軸と重心の距離が，慣性半径と等しいとき．

6．O のまわりの慣性モーメント



$$I = \frac{2}{5}Mr^2 + Ml^2$$

物理振り子の周期 T

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{Mgl}\left(\frac{2}{5}Mr^2 + Ml^2\right)}$$
$$= 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}\left(\frac{2}{5}\frac{a^2}{l} + l\right)}$$

単振り子の周期は $T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$ であるから

$$\frac{T}{T_0} = \sqrt{1 + \frac{2}{5}\left(\frac{r}{l}\right)^2} \approx 1 + \frac{1}{5}\left(\frac{r}{l}\right)^2$$

7． 球の質量は変化しない．収縮前，後の半径を a_1, a_2，慣性モーメントを I_1, I_2，角速度を ω_1, ω_2，運動エネルギーを T_1, T_2 とする．外力は働いていないから，回転軸のまわりの角運動量は保存される．

球の慣性モーメントは

$$I_1 = \frac{2}{5}Ma_1^2,\ I_2 = \frac{2}{5}Ma_2^2$$

角運動量保存則から

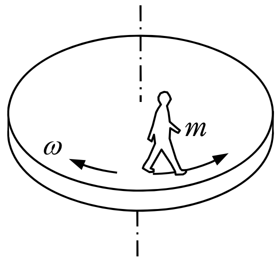
$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

運動エネルギーの比

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{I_2\omega_2^2/2}{I_1\omega_1^2/2} = \frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 = n^2$$

内力によって角運動量は変化しないが，運動エネルギーが増加している．

8．板の角速度を ω とすると，人の板に対する速度が v であるから，絶対速度 V は



$$v = V - r\omega$$
$$V = v + r\omega$$

回転軸に対する角運動量保存の法則から

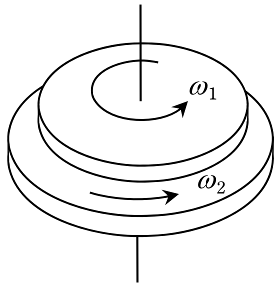
$$mrV + \frac{1}{2}Mr^2\omega = 0$$

$$mr(v + r\omega) + \frac{1}{2}Mr^2\omega = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}Mr^2 + mr^2\right)\omega = -mrv$$

$$\omega = \frac{-mrv}{\frac{1}{2}Mr^2 + mr^2} = \frac{-2mv}{(M + 2m)r}$$

9．連結後の角速度を ω とすると，角運動量保存の法則から



$$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = (I_1 + I_2)\omega$$
$$\omega = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{(I_1 + I_2)}$$

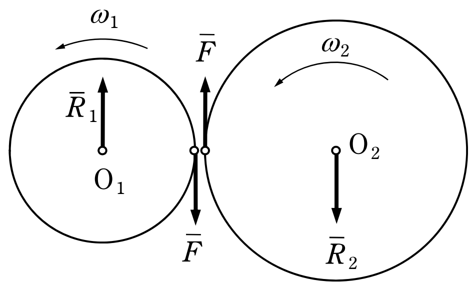
運動エネルギーの損失は

$$\frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 - \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega^2$$
$$= \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 - \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\left(\frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{2}\frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2}(\omega_1 - \omega_2)^2$$

［参考］連結したとき，接触部で互いに及ぼし合う力は，作用･反作用の法則によって大きさが等しく向きが反対であるから，剛体 1 から 2 に及ぼす力のモーメントを N とすると，剛体 2 から 1 に及ぼす力のモーメントは $-N$ であり，角運動量の保存の法則が成り立つ.

$$I_1(\omega - \omega_1) = \int N\,dt, \quad I_2(\omega - \omega_2) = \int (-N)\,dt$$

10．歯のかみ合う点で大きさ $\overline{F}$ の力積が働き合うとする．連結後の角速度を ω とすると，角運動量保存の法則から



$$I_1\omega_1' - I_1\omega_1 = -a_1\overline{F} \qquad (1)$$

$$I_2\omega_2' - I_2\omega_2 = -a_2\overline{F} \qquad (2)$$

かみ合ってからは反対向きにすべらずにまわるから

$$a_1\omega_1' = -a_2\omega_2' \qquad (3)$$

(1)(2)(3)より

$$\omega_1' = \frac{\dfrac{I_1}{a_1^2}\omega_1 - \dfrac{I_2}{a_1^2}\dfrac{a_2}{a_1}\omega_2}{\dfrac{I_1}{a_1^2} + \dfrac{I_2}{a_2^2}},$$

O_1 のまわりの角運動量の変化は

$$I_1\omega_1' + I_2\omega_2' - I_1\omega_1 - I_2\omega_2 = -a_1\overline{F} - a_2\overline{F} = -(a_1 + a_2)\overline{F}$$

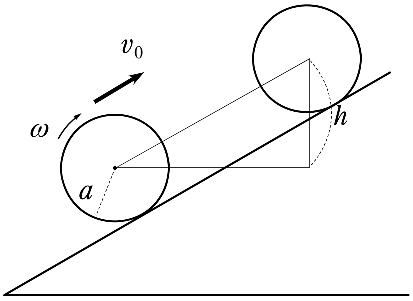
となり，角運動量は保存されない．質点系について，慣性系の定点（または重心）について力のモーメントの和が 0 であれば，角運動量は保存される．いま，この 2 つの輪を質点系と考えると，O_1 まわりの外力のモーメントには，O_2 で軸受けからの抗力によるモーメント $(a_1 + a_2)R_2$ が存在する．したがって，この系の角運動量は保存されず，角運動量に対して非孤立系である．

第 12 章　剛体の平面運動

1．球が h だけ斜面を上ったとき，力学的エネルギー保存の法則から

$$\frac{1}{2}MV_G^2+\frac{1}{2}I_{(G)}\omega^2=Mgh$$

$V_G=v_0$, $\omega=v_0/a$, $I=(2/5)Ma^2$ を代入する．

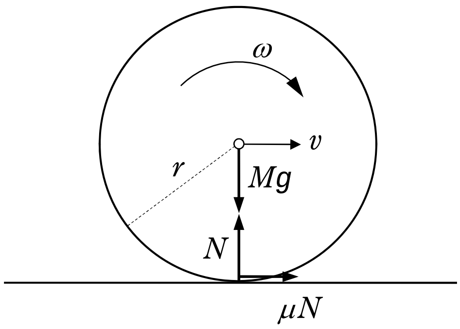


$$\frac{1}{2}Mv_0^2+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}Ma^2\right)\left(\frac{v_0}{a}\right)^2=Mgh$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)v_0^2=gh$$

$$h=\frac{10}{7}\frac{v_0^2}{g}$$

2．球を静かにおいた直後，球と平面の接触面は滑っている．したがって動摩擦力が働く．球の重心の並進と回転について



並進　$M\dfrac{dv}{dt}=\mu Mg$　　(1)

回転　$I\dot{\omega}=-r\mu Mg$　　(2)

(1)より

$$v=\mu gt$$

(2)に $I=(2/5)Ma^2$ を代入する．

$$\dot{\omega}=-\frac{r\mu Mg}{I}=-\frac{5Mr\mu Mg}{2Mr^2}=-\frac{5\mu g}{2r}$$

初期条件：時刻 $t=0$ で $\dot{\omega}=\omega_0$ であるから

$$\omega=\omega_0-\frac{5\mu g}{2r}t$$

球の並進速度 v は増加し，角速度 ω は減少する．この結果，ある時刻 t_1 で $v=r\omega$ となり滑りがなくなる．

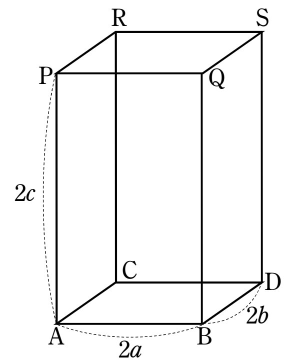
$$\mu gt_1=r\left(\omega_0-\frac{5\mu g}{2r}t_1\right)$$

$$t_1=\frac{2r\omega_0}{7\mu g}$$

このときの速度は $v_1=\mu gt_1=(2/7)r\omega_0$．時刻 t_1 で接触面のすべりがなくなり，それ以降はす

べらずに速度 v_1 で転がる．

3．図のようにブロックの各頂点を定義し，長さを $2a,\ 2b,\ 2c$ とする．ブロックの重心 G を通り AC に平行な軸まわりの慣性モーメントは式（11.3-10）より

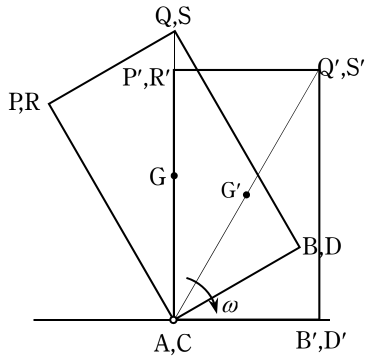


$$I_G = \frac{a^2 + c^2}{3} M$$

辺 AC，または辺 BD のまわりの慣性モーメントは平行軸の定理（式 11.3-6 参照）より，ともに

$$I = I_G + M(a^2 + c^2) = \frac{4}{3} M(a^2 + c^2)$$

ブロックが辺 AC まわりに回転し，ブロックの底面 ABCD が床につく直前の辺 AC まわりのブロックの角速度 ω は，運動エネルギー保存則から



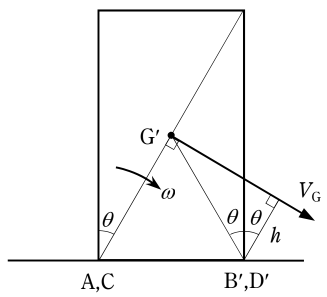
$$\frac{1}{2} I\omega^2 = Mg(\sqrt{a^2 + c^2} - c)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2Mg(\sqrt{a^2 + c^2} - c)}{I}} = \sqrt{\frac{3g(\sqrt{a^2 + c^2} - c)}{2(a^2 + c^2)}}$$

ブロックの底面が床につく直前の，辺 B′D′まわりのブロックの角運動量を求める．これは，式(12.2-1)（または(10.4.4)）から，重心 G の運動の辺 B′D′まわりの角運動量と，重心まわりの角運動量の和からなる．

重心 G は AG と垂直に，速度 $V_G = \sqrt{a^2 + c^2}\ \omega$ を持つ．

重心 G の速度ベクトルに辺 B′D′ から降ろした垂線の長さを h とすると



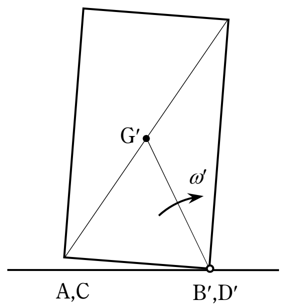
$$h = \sqrt{a^2 + c^2}\cos(2\theta) = \sqrt{a^2 + c^2}(2\cos^2\theta - 1)$$
$$= \frac{c^2 - a^2}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$

ここで，$\cos\theta = c / \sqrt{a^2 + c^2}$ を用いた．

辺 BD まわりのブロックの角運動量は

$$
\begin{aligned}
I_{\mathrm{G}}\omega + MV_{\mathrm{G}}h &= I\omega + Mh\sqrt{a^2+c^2}\,\omega \\
&= \left\{\frac{1}{3}M(a^2+c^2) + (c^2-a^2)M\right\}\sqrt{\frac{3g(\sqrt{a^2+c^2}-c)}{2(a^2+c^2)}} \\
&= \frac{2(2c^2-a^2)}{3}M\sqrt{\frac{3g(\sqrt{a^2+c^2}-c)}{2(a^2+c^2)}}
\end{aligned}
$$

底面 ABCD がついた後，ブロックが辺 BD のまわりに回転を始めるときの辺 BD まわりの角速度を ω' とすると $I_{\mathrm{G}}\omega_{\mathrm{G}} + MV_{\mathrm{G}}h = I\omega'$ であるから



$$
\begin{aligned}
\omega' &= \frac{2(2c^2-a^2)}{3}M\sqrt{\frac{3g(\sqrt{a^2+c^2}-c)}{2(a^2+c^2)}}\ \frac{3}{4M(a^2+c^2)} \\
&= \frac{2c^2-a^2}{2(a^2+c^2)}\sqrt{\frac{3g(\sqrt{a^2+c^2}-c)}{2(a^2+c^2)}}
\end{aligned}
$$

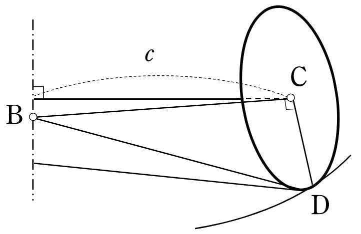
$c > a/\sqrt{2}$ の場合: ω' が正となり，ブロックは辺 BD のまわりに回転する．
$c < a/\sqrt{2}$ の場合: ω' が負となり，ブロックは回転せずに机に対して撃力を与え，停止する．

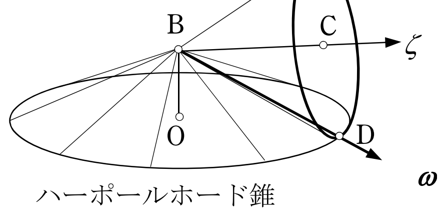
第 13 章　固定点のまわりの剛体の運動

1.

円板が水平面と接する点 D の瞬間速度は 0．円板の中心 C から円板から垂直をなすように引いた線と，円板が水平面上で回転する鉛直軸が交わる点を B とすると，DB が瞬間回転軸となっている．

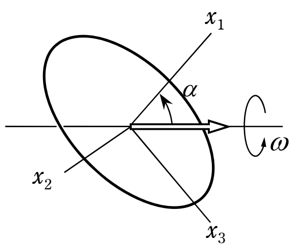
OB を軸として∠DBO を半頂角とする円錐が空間に固定されたハーパーホード錐, BC を軸として∠CBD を半頂角とする円錐が剛体とともに回転するポールホード錐





2．輪の慣性主軸に固定された座標系からみた角速度の x_1, x_2, x_3 方向の成分は

$$\omega_1 = \omega\cos\alpha,\ \omega_2 = 0,\ \omega_3 = \omega\sin\alpha$$

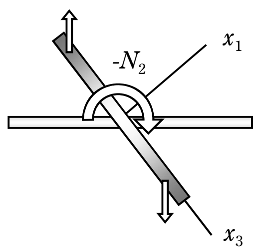


輪の慣性モーメント

$$A = Ma^2,\ B = \frac{Ma^2}{2},\ C = \frac{Ma^2}{2}$$

オイラーの式に代入する

$$N_1 = A\frac{d\omega_1}{dt} - (B-C)\omega_2\omega_3$$
$$= -(B-C)\omega^2\sin\alpha\cos\alpha = 0$$
$$N_2 = B\frac{d\omega_2}{dt} - (C-A)\omega_3\omega_1 = \frac{Ma^2}{2}\omega^2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$N_3 = C\frac{d\omega_3}{dt} - (A-B)\omega_1\omega_2 = 0$$



N_1, N_2, N_3 は輪に対して外から与えられる偶力のモーメントであるから，逆に軸受けは輪によって x_2 軸のまわりに

$$-N_2 = -(C-A)\omega_3\omega_1 = -\frac{Ma^2}{2}\omega^2\sin\alpha\cos\alpha$$

の偶力のモーメントを受ける．これは，円板には遠心力で振れまわりが発生するので，軸受けに x_1 軸まわりの力のモーメントが働くことを意味している．

3. 円板には中心 O 以外から力が働かないため，O まわりの角運動量 $\boldsymbol{L}$ は慣性系からみると保存されている．

円板の慣性モーメントは

$$A=B=\frac{Ma^2}{4},\ C=\frac{Ma^2}{2}=2A$$

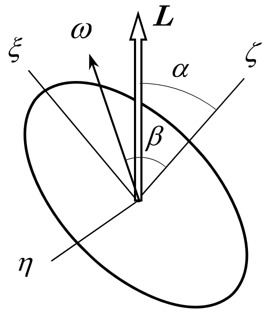
主軸により表示した角運動量と角加速度の関係は

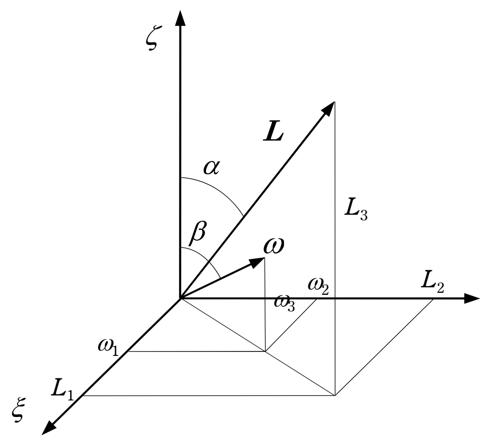
$$L_1=A\omega_1,\ L_2=A\omega_2,\ L_3=C\omega_3$$

ζ 軸と $\boldsymbol{L}$ のなす角α，ζ 軸と $\boldsymbol{\omega}$ のなす角度 β は

$$\tan\alpha=\frac{\sqrt{L_1^2+L_2^2}}{L_3}=\frac{\sqrt{(A\omega_1)^2+(A\omega_2)^2}}{C\omega_3}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}}{\omega_3}$$

$$=\frac{1}{2}\tan\beta$$





剛体に与えた回転に対して角運動量は

$$L_1=A\omega_1=A\omega\sin\beta,\ L_2=0,\ L_3=C\omega_3=C\omega\cos\beta$$

であり，角運動量 $\boldsymbol{L}$ の大きさは

$$L=\sqrt{L_1^2+L_2^2+L_3^2}=\sqrt{(A\omega\sin\beta)^2+(C\omega\cos\beta)^2}=A\omega\sqrt{1+3\cos^2\beta}$$

となるが，O のまわりの力モーメントが 0 であるため，$\boldsymbol{L}$ は慣性空間では大きさも方向も変わらない．式(13.5-6)より ζ 軸が $\boldsymbol{L}$ のまわりを回る角速度 $\dot{\varphi}$ は

$$\dot{\varphi}=\frac{L}{A}=\omega\sqrt{1+3\cos^2\beta}$$

周期 T は次のようになる．

$$T=\frac{2\pi}{\dot{\varphi}}=\frac{2\pi}{\omega\sqrt{1+3\cos^2\beta}}$$

4. 軸対称であるから $A = B$．オイラーの運動方程式は

$$A\frac{d\omega_1}{dt} - (A - C)\omega_2\omega_3 = -\lambda\omega_1 \qquad (1)$$

$$A\frac{d\omega_2}{dt} - (C - A)\omega_3\omega_1 = -\lambda\omega_2 \qquad (2)$$

$$C\frac{d\omega_3}{dt} = -\lambda\omega_3 \qquad (3)$$

(3)を積分して

$$\omega_3 = a e^{-\lambda t/C} \qquad (a \text{ は } \omega_3 \text{ の初期値})$$

(1)×ω_1 + (2) ×ω_2 より

$$A\left(\omega_1\frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2\frac{d\omega_2}{dt}\right) = -\lambda(\omega_1^2 + \omega_2^2)$$

$$A\frac{d}{dt}(\omega_1^2 + \omega_2^2) = -\lambda(\omega_1^2 + \omega_2^2)$$

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = b e^{-\lambda t/A} \qquad (b \text{ は } \omega_1^2 + \omega_2^2 \text{ の初期値})$$

$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$ とおくと <u>$C>A$ の場合</u>,

$$\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{\omega^2} = \frac{b^2 e^{-2\lambda t/A}}{a^2 e^{-2\lambda t/C} + b^2 e^{-2\lambda t/A}} = \frac{1}{(a^2/b^2)e^{(-2\lambda t/C + 2\lambda t/A)} + 1} = \frac{1}{1 + b^2/a^2\, e^{2\lambda t(C-A)/(AC)}}$$

$t \to \infty$ において $e^{-2\lambda t(C-A)/(AC)} \to 0$ となり，$(\omega_1^2 + \omega_2^2)/\omega^2 \to 0$.

$$\frac{\omega_3^2}{\omega^2} = \frac{a^2 e^{-2\lambda t/C}}{a^2 e^{-2\lambda t/C} + b^2 e^{-2\lambda t/A}} = \frac{1}{1 + (b^2/a^2)e^{(-2\lambda t/A + 2\lambda t/C)}} = \frac{1}{1 + (b^2/a^2)e^{-2\lambda t(C-A)/(AC)}}$$

$t \to \infty$ において $e^{-2\lambda t(C-A)/(AC)} \to 0$ となり，$\omega_3^2/\omega^2 \to 1$.

時間とともに回転軸は対称軸に近づく.